ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1984

DEUXIÈME INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

SUJET N° 1

Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\, dx .$$

1/ - Etudier et représenter graphiquement la fonction f_n .

2/ - Calculer I_0, I_1 et I_2 .

3/ - Par le changement de variable $t = \operatorname{tg} x$, exprimer I_n sous la forme $\int_0^{+\infty} R_n(t)\, dt$, où R_n est une fraction rationnelle que l'on précisera.

4/ - Calculer I_n en developpant le numérateur de R_n et en utilisant la formule suivante, admise, valable pour tout réel $\alpha > 1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^{\alpha}} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$

En application, donner les expressions de I_3 et I_4 .

5/ - Déterminer $\lim_{n \to \infty} I_n$.

SUJET N°2

On introduit, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2$$

1/ - Calculer S_{2m} et S_{2m-1} pour m entier strictement positif.

2/ - Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$.

Cette série est-elle absolument convergente ?

3/ - Calculer la somme de la série précédente.

4/ - On pose de même,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^3 = 1^3 - 2^3 + 3^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n^3$$

Quelle est la nature de la série de terme général $v_n = \frac{1}{t_n}$?

5/ - On pose enfin

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sqrt{k} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \sqrt{n}$$

Déterminer la nature de la série de terme général $w_n = \frac{1}{R_n}$

SUJET N°3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si x est réel non nul, et $f(0) = 0$ [On pourra utiliser la notation $e^{-\frac{1}{x^2}}$ si l'on préfère].

1/ - Dresser un tableau de variation de f et dessiner sa courbe représentative (Γ) ; on précisera tangente en 0, asymptote et points d'inflexion.

2/ - Montrer que l'aire comprise entre (Γ) et son asymptote est de mesure finie, que l'on calculera [On pourra utiliser sans démonstration le résultat $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\, dt = \sqrt{\pi}$].

3/ - Démontrer que, pour $x \neq 0$, la dérivée d'ordre n de f, soit $f^{(n)}$, est de la forme

$$f_n(x) = x^{-3n} \cdot f(x) \cdot P_n\left(x^2\right),$$

où P_n est un polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

4/ - Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f^{(n)}(0)$.

5/ - Etablir que f satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre, et en déduire entre P_{n+1}, P_n, P_{n-1}, P_{n-2} une récurrence du type :

$$P_{n+1}(X) = A_n(X) \cdot P_n(X) + B_n(X) \cdot P_{n-1}(X) + C_n(X) \cdot P_{n-2}(X),$$

où A_n, B_n, C_n sont des polynômes que l'on déterminera.

SUJET N° 4

1/ - Soit E la partie de $\mathbb{C}$ constituée par les nombres complexes z tels que $|z + z^2| \leq 1$, et (Γ) celle pour laquelle $|z + z^2| = 1$. Ecrire l'équation de (Γ) en coordonnées polaires $\rho = f(\theta)$, de centre $-\frac{1}{2}$ [On posera $z = -\frac{1}{2} + \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$]

2/ - Dessiner la courbe (Γ).

3/ - Soit $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z + z^2\right)^k$. Préciser l'ensemble (C_1) de convergence (dans $\mathbb{C}$) de cette série de fonctions et en déduire l'expression de $g(z)$, pour $z \in (C_1)$, sous la forme d'une fraction rationnelle.

4/ - Démontrer que g est développable en série entière après décomposition en éléments simples, soit :
$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Calculer le coefficient a_n et montrer qu'il satisfait à la récurrence :

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 1$$

5/ - Ce résultat au besoin admis, déterminer l'ensemble (C_2) de convergence de la série entière $h(z)$ et le comparer à (C_1).

SUJET N° 5

3/ – On appelle $\mathcal{Q}_{a,b}$ l'ensemble des applications f différentiables de E dans $\mathbb{R}$, pour lesquelles, en tout $(x, y) \in E$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq a, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq b$$

Comparer, au sens de l'inclusion, les ensembles $\mathcal{P}_{a,b}$ et $\mathcal{Q}_{a,b}$

4/ – On considère maintenant la récurrence :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}, \quad n \geq 0$$

a) - Si $u_0 > 1$ et $u_1 > 1$, montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite,

b) - Que se passe-t-il si l'on sait seulement que $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$?

5/ - On suppose

$$f(x, y) = \frac{1}{Ax + By + C}$$

où A, B, C sont strictement positifs ainsi que x et y (donc $E =]0, \infty[\times]0, \infty[$).

a) - Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (A, B, C) afin que la condition de la question 3/– ci-dessus soit satisfaite pour au moins deux réels a, b, positifs de somme $q < 1$.

b) - Quelle est alors la limite des suites (u_n) telles que $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$?

(On suppose $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et soit $E = I \times I$ $(\subset \mathbb{R}^2)$.
Pour tous réels a et b, positifs ou nuls, dont la somme η est < 1, on définit l'ensemble $\mathcal{P}_{a,b}$ comme étant constitué par les applications f de E dans I satisfaisant à la condition

$$\forall (x_1, y_1) \in E, \quad \forall (x_2, y_2) \in E, \quad |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq a|x_2 - x_1| + b|y_2 - y_1|.$$

1/ - a) - Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{P}_{a,b}$ est continue sur E. Est-elle uniformément continue ?

b) - Partant de $(u_0, u_1) \in E$, on définit la suite (u_n) par

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n), \quad n \geq 0$$

Montrer que si (u_n) admet une limite finie ℓ, alors $\ell = f(\ell, \ell)$ et que, d'autre part, il ne peut exister qu'un seul réel ℓ satisfaisant à cette propriété.

2/ - On pose $d_n = |u_{n+1} - u_n|$ et $M = \max(u_0, u_1)$

a) - Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$d_n \leq M (\sqrt{\eta})^n$$

b) - En déduire l'existence d'un certain réel C, dont on précisera la valeur, pour lequel on a, pour tous entiers n et p :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq C (\sqrt{\eta})^n$$

c) - En déduire l'existence de $\lim_{n \to \infty} u_n$.